2003年　東大数学　文系第2問

$$\begin{cases} ① \Leftrightarrow x+3y \geqq a \\ ② \Leftrightarrow 3x+y \geqq b \\ ③ \Leftrightarrow x \geqq 0 \\ ④ \Leftrightarrow y \geqq 0 \end{cases}$$ のうち

第1象限とにまとめ条件を簡略化.

③かつ④の表す領域は、x軸上、または y軸上、または第1象限である。

$$\begin{cases} ①\text{の領域の境界は } x+3y=a \quad \cdots ①' \\ ②\text{の 〃 : } 3x+y=b \quad \cdots ②' \text{ である。} \end{cases}$$

③かつ④の領域の端は$(0,0)$なので、原点と①、②の位置関係で、以下のように場合わけする。

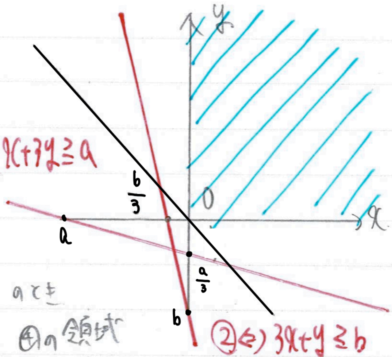
(i)

$a \leqq 0$ や $b \leqq 0$ でもok.

$\frac{a}{3} \leqq 0$ かつ $\frac{b}{3} \leqq 0$

∴ $a \leqq 0$ かつ $b \leqq 0$ のとき

①かつ②かつ③かつ④の領域は右図の**青の領域**である。



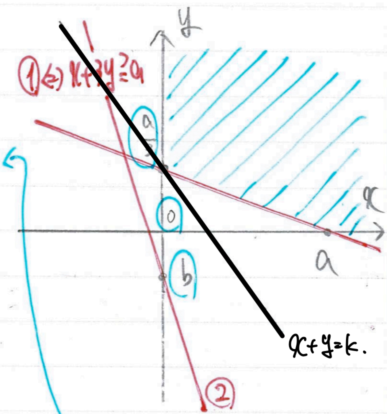
$x+y=k \Leftrightarrow y=-x+k$ の最小値は $(0,0)$を通る時

よって $k=0$

(ii) $a \geqq 0$も可

$\frac{a}{3} \geqq 0$ かつ $\frac{a}{3} \geqq b$ のとき

①かつ②かつ③かつ④の領域は右図の**青い領域**である。



$x+y$の最小値は $(0, \frac{a}{3})$ を通る時なので

$k=\frac{a}{3}$

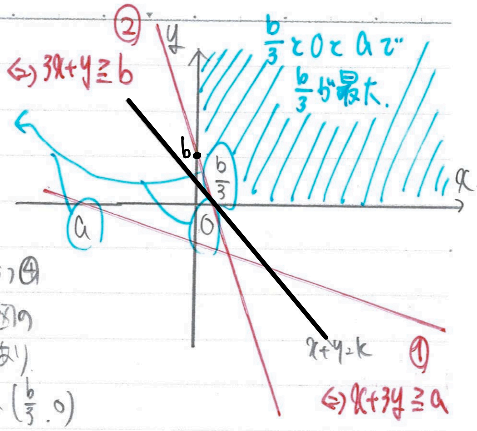
②のy切片bは $\frac{a}{3}$より下であれば 0以上でもOK

(iii)

$\frac{b}{3} \geqq 0$ かつ $\frac{b}{3} \geqq a$ のとき

$b \geqq 0$ も可

①かつ②かつ③かつ④の領域は右図の**青の領域**であり



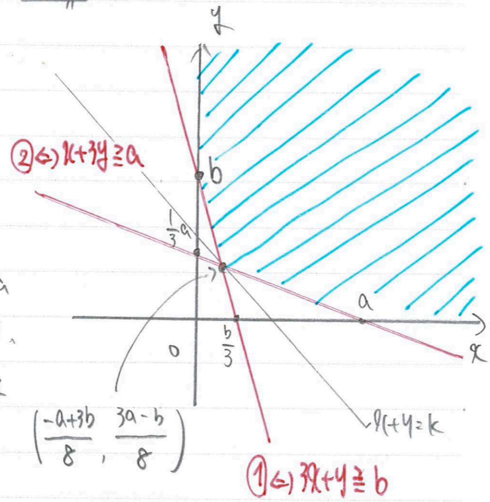
$x+y$の最小値は $(\frac{b}{3}, 0)$ を通るときである。

よって $k=\frac{b}{3}+0=\frac{b}{3}$

(iv)

$\frac{1}{3}a \leqq b$ かつ $\frac{1}{3}b \leqq a$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}a \leqq b \leqq 3a$ のとき



$x+y$の最小値は $\left(\frac{-a+3b}{8}, \frac{3a-b}{8}\right)$ を通るとき。

よって $x+y = \frac{-a+3b}{8} + \frac{3a-b}{8} = \frac{a+b}{4}$

以上より

$$\begin{cases} a \leqq 0,\ b \leqq 0 \text{ のとき } & 0 \\ a \geqq 0,\ \frac{a}{3} \geqq b \text{ のとき } & \frac{a}{3} \\ b \geqq 0,\ \frac{b}{3} \geqq a \text{ のとき } & \frac{b}{3} \\ \frac{a}{3} \leqq b \leqq 3a \text{ のとき } & \frac{a+b}{4} \end{cases}$$

1995年　東大数学　文系第1問.　理系第1問 ②

解法4 数IIBでも解ける方法

② ⇔ $k \geqq \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2}}$　$(t>0)$

⇔ $k\sqrt{t^2+2} \geqq t+1$　$(\because \sqrt{t^2+2}>0)$

両辺2乗

⇔ $k^2(t^2+2) \geqq (t+1)^2$　(∵ 両辺共に正)

⇔ $(k^2-1)t^2-2t+2k^2-1 \geqq 0$

この不等式が、すべての $t>0$ で成立すればよい。

→ 最大、最小問題へ

つまり (左辺の最小値) $\geqq 0$ となればよい。

左辺の t^2 の係数が k^2-1 なので、

- $k^2-1>0$ なら 下に凸 の2次関数 (i)
- $k^2-1<0$ なら 上に凸 の 〃 (iii)
- $k^2-1=0$ なら 1次関数となり、(ii)

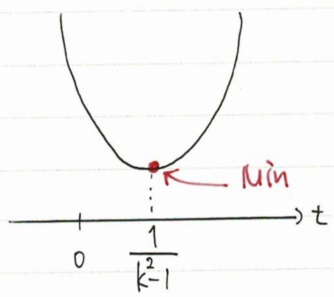
最小値の検討方法が変わる。

(i) $k^2-1>0$ ⇔ $k<-1,\ 1<k$ の時.

(左辺)は下に凸の2次関数.

$$(\text{左辺}) = (k^2-1)\cdot\left(t-\frac{1}{k^2-1}\right)^2 - \frac{1}{k^2-1} + 2k^2-1 \geqq 0$$

よって、軸の位置は $t=\dfrac{1}{k^2-1}>0$ である。



よって、左図のとおり最小値は頂点である。

よって、$-\dfrac{1}{k^2-1}+2k^2-1 \geqq 0$ ⇔ $(k^2-1)(2k^2-1) \geqq 1$

⇔ $2k^4-3k^2 \geqq 0$ ⇔ $k^2(2k^2-3) \geqq 0$

$k \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$,　$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq k$

②より $k>0$ が明らかなので、$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq k$

$k<-1,\ 1<k$ を満たすのは、$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq k$　(i)の結論

(ii) $k^2-1=0$ ⇔ $k=\pm 1$ の時.

(左辺) $= -2t+1 \geqq 0$

これがすべての $t>0$ で成立すればよいが、

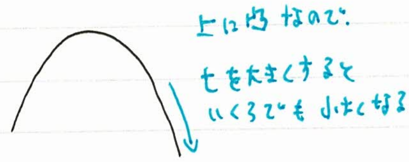
$t>\frac{1}{2}$ となる t で不成立である。

(例えば、$t=3$ を代入すると $-5 \geqq 0$ となり不成立)

(iii) $k^2-1<0$ ⇔ $-1<k<1$ の時.

(左辺)は上に凸の2次関数である。

すると、$t>0$ を満たす t のうち、十分大きな t に対して、(左辺) <0 となるので不成立



以上から、

すべての $t>0$ で ② が成立するためには

$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq k$ となればよい。

これを満たす k の最小値は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ //

解法5 コーシー・シュワルツの不等式の利用.

与式の両辺は正なので $k>0$ である。

両辺2乗して $k^2(2x+y) \geqq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ …①

コーシー・シュワルツの不等式

$(a^2+b^2)(X^2+Y^2) \geqq (aX+bY)^2$ に

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$b=1$　$X=\sqrt{2x}$　$Y=\sqrt{y}$ を代入し

$\left(\frac{1}{2}+1\right)(2x+y) \geqq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

⇔ $\frac{3}{2}(2x+y) \geqq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

等号成立条件は $\frac{1}{\sqrt{2}}:1=\sqrt{2x}:\sqrt{y}$　∴ $y=4x$.

①と比較して、求める k の最小値は $k=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$